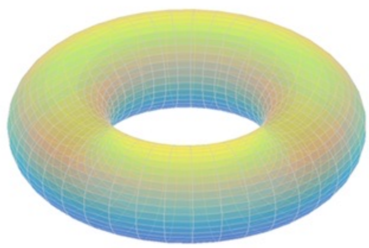
Topología y Analisis de Datos

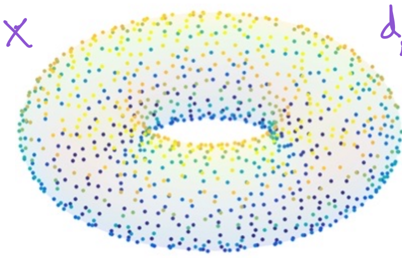
Input: Espacios topológicos



$\mathbb{X}$

Input: Espacios métricos finitos

X



$d_X : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$
distancia

$d_X(x,x)=0, \quad d_X(x,x') = d_X(x',x)$

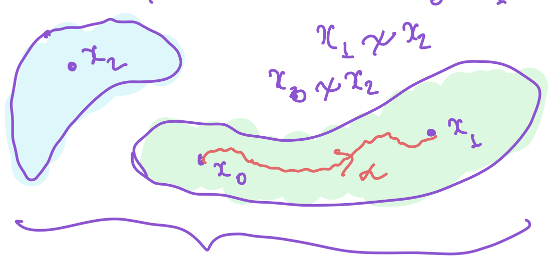
$d_X(x,x'') \leq d_X(x,x') + d_X(x',x'')$

Concepto: Componentes conexas por caminos

$x_0 \sim x_1$

$x_1 \nsim x_2$

$x_0 \nsim x_2$

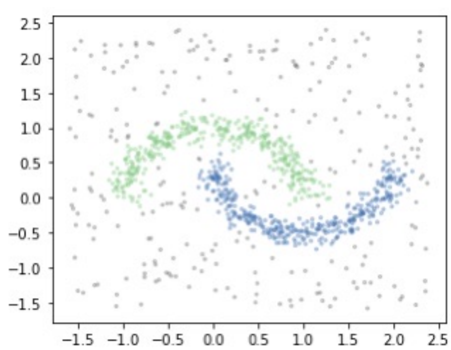


$\mathbb{X}$

$x_0, x_1 \in \mathbb{X}$ estan en la misma componente conexa por caminos si y solo si $\exists\ \alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ continua, tal que $\alpha(0) = x_0$ $\alpha(1) = x_1$

Concepto: Agrupamientos (clusters)

(martes)
(digitos)

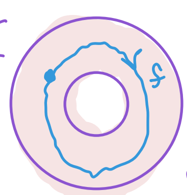


X

$x_0, x_1 \in X$ estan en el mismo cluster si y solo si "son similares"

Concepto: Huecos

$\mathbb{X}$



$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$

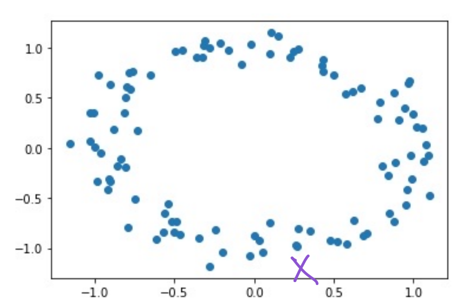
$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$

$f : S^1 \longrightarrow \mathbb{X}$ continua

representa un hueco, si y solo si no hay $F : D^2 \longrightarrow \mathbb{X}$ continua con $F|_{S^1} = f$

Concepto: (miercoles)

¿?



X

(Periodicidad en series de tiempo)

Complejos Simpliciales

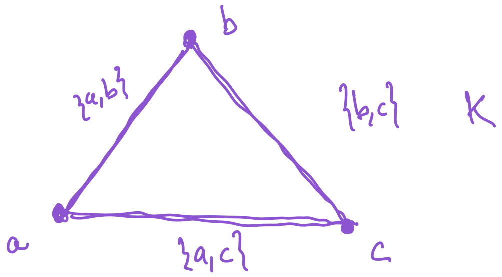
Def: Un complejo simplicial con vértices en un conjunto $X \neq \emptyset$, es un conjunto K cuyos elementos son conjuntos finitos no vacíos $\sigma \subseteq X$, tal que $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \in K$ siempre implica $\tau \in K$.

Ejemplos:

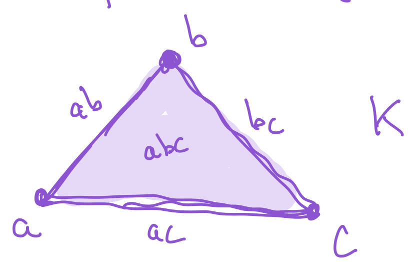
1) $X = \{a, b, c\}$, $K = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

razón: $\{a,b\} \in K$ pero $\{b\} \notin K$

2) $X = \{a, b, c\}$, $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

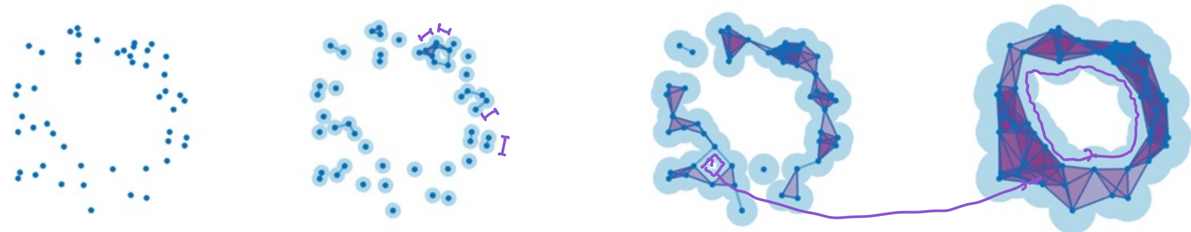


3) $X = \{a, b, c\}$ $K = \{a, b, c, ab, bc, ac, abc\}$



4) Sea (X, d_X) un conjunto de datos (un espacio métrico finito) y para $\varepsilon > 0$, defina

$$\underbrace{R_\varepsilon(X, d_X)}_{\varepsilon\text{- complejo de Rips}} = \left\{ \sigma \subseteq X \;\middle|\; \sigma \neq \emptyset \text{ y } \underbrace{\max_{x, x' \in \sigma} d_X(x, x')}_{\operatorname{diam}(\sigma)} < \varepsilon \right\}$$



X, d_X $\qquad R_\varepsilon(X)$ $\qquad R_{\varepsilon'}(X)$ $\qquad R_{\varepsilon''}(X)$

$$0 \leq \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon''$$

5) Sea K un complejo simplicial con vértices en X, y sea $f : X \to [0, \infty)$ una función. Defina para $r \in \mathbb{R}$

$$K^{\leq r} = \left\{ \sigma \in K \;\middle|\; \max_{x \in \sigma} f(x) \leq r \right\} \quad r\text{- subnivel}$$

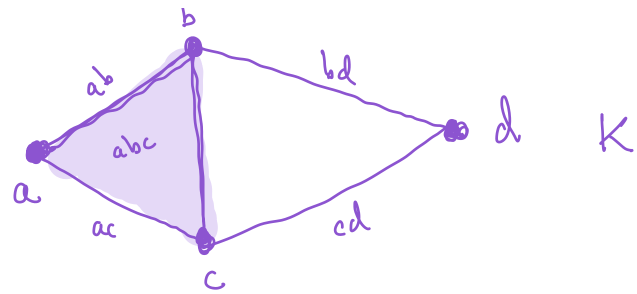
$$K^{\geq r} = \left\{ \sigma \in K \;\middle|\; \min_{x \in \sigma} f(x) \geq r \right\} \quad r\text{- supernivel}$$

Homología de Complejos Simpliciales

Sea K un complejo simplicial con vértices en X

$$X = \{a, b, c, d\}, \qquad K = \{a, b, c, ab, bc, ac, abc, d, cd, bd\}$$

$X = \{a, b, c, d\}$



1) Para cada entero $n \geq 0$, sea

$$K^{(n)} = \{\sigma \in K \mid \#(\underbrace{\sigma}_{n\text{-simplejo}}) = n+1\}$$

$K^{(0)} = \{a, b, c, d\}$, $K^{(1)} = \{ab, bc, ac, bd, cd\}$, $K^{(2)} = \{abc\}$

0-simplejos vertices

1-simplejos aristas

2-simplejos triangulos

$K^{(3)} = \{\ \} = \emptyset$

3-simplejos tetrahedros

$K = \underbrace{\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})}_{\text{todos los subconjuntos de } \{a,b,c,d\}} - \{\emptyset\}$

tetrahedro

2) Para un campo $\mathbb{F}$ $\left(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ p \text{ primo},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \text{etc}\right)$ sea

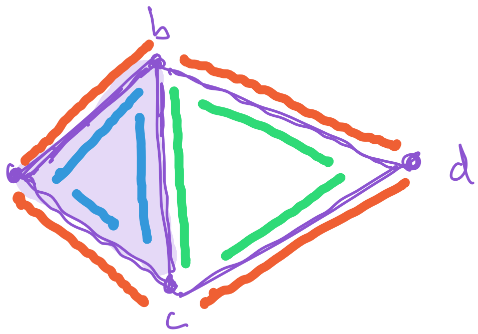
n-cadenas de K con coeficientes en $\mathbb{F}$

$C_n(K; \mathbb{F})$ = Espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ generado por $K^{(n)}$

$\varsigma \in C_n(K;\mathbb{F})$ si y solo si $\varsigma = \underbrace{\lambda_1 \cdot \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \cdots + \lambda_k \sigma_k}_{\text{suma formal}}$

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}_{\text{escalares}} \in \mathbb{F} \qquad \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}_{\text{n-simplejos.}} \in K^{(n)}$$

Ejemplo

$K =$ 

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$$\xi_1 = ab + bd + cd + ac \in C_1(K; \mathbb{Z}_2)$$

$$\xi_2 = bd + cd + bc \in C_1(K; \mathbb{Z}_2)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \xi_1 - \xi_2 \\ &= ab - \cancel{bd} + \cancel{bd} - \cancel{cd} + \cancel{cd} - bc + ac \\ &= ab - bc + ac \\ &= ab + bc + ac \end{aligned} \Bigg\} \; 1 = -1 \text{ en } \mathbb{Z}_2$$

3) Fije un orden total $\leq$ en X. Para cad $\sigma \in K^{(n)}$ escriba $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ donde $x_i \leq x_j$ en X si y solo si $0 \leq i \leq j \leq n$ en $\mathbb{Z}$.

Defina la frontera de σ para $n \geq 1$:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n (\sigma \setminus \{x_i\}) \in C_{n-1}(K; \mathbb{F})$$

$$= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} - \{x_0, x_2, x_3, \ldots, x_n\} + \cdots + (-1)^n \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$$

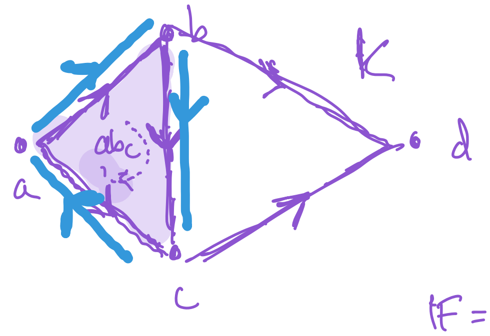
y para $n=0$, sea $\partial_0(\sigma) = 0$.

Extienda ∂_n como una transformacion lineal:

$$\partial_n : C_n(K;\mathbb{F}) \longrightarrow C_{n-1}(K;\mathbb{F})$$
$$\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_k\sigma_k \longmapsto \lambda_1\partial_n(\sigma_1)+\cdots+\lambda_k\partial_n(\sigma_k)$$

Example:

$$X = \{\underbrace{a \le b \le c \le d}_{\text{orden total}}\}$$



$\mathbb{F} = \mathbb{Q}$

$$\partial_2(\{a,b,c\}) = \{b,c\} - \{a,c\} + \{a,b\}$$

4) Definir ciclos, fronteras, homología

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K;\mathbb{F}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K;\mathbb{F}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K;\mathbb{F}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Defina
$$B_n(K;\mathbb{F}) = \mathrm{Img}(\partial_{n+1}) \quad (\text{Fronteras})$$
$$Z_n(K;\mathbb{F}) = \mathrm{Kernel}(\partial_n) \quad (\text{ciclos})$$

$$\boxed{\text{Thm}: \quad B_n(K;\mathbb{F}) \subseteq Z_n(K;\mathbb{F})}$$

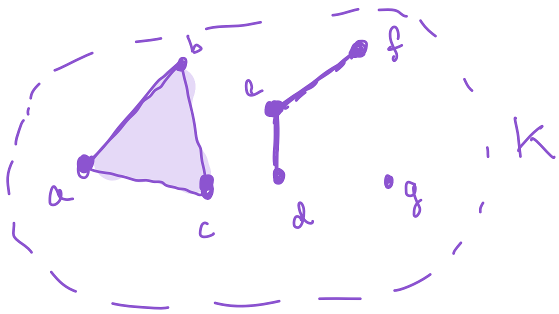
$\neq$

Def: La n-ésima homología de K con coeficientes en $\mathbb{F}$, es el espacio vectorial cociente

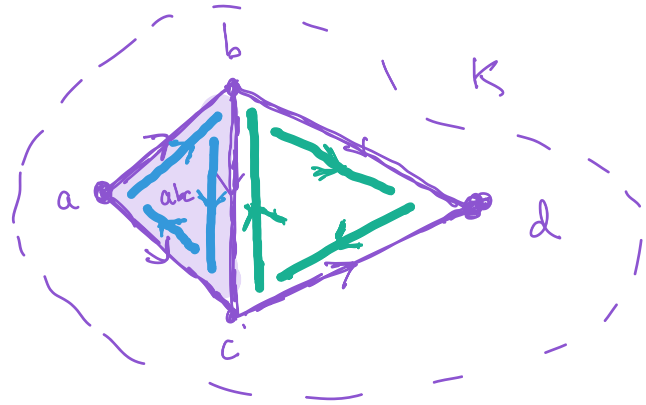
$$\boxed{H_n(K;\mathbb{F}) = Z_n(K;\mathbb{F}) / B_n(K;\mathbb{F})}$$

$[\varrho] \in H_n(K;\mathbb{F})$, $[\varrho] = \varrho + B_n(K;\mathbb{F})$

Concepto: Componentes conexas por caminos



Concepto: Huecos



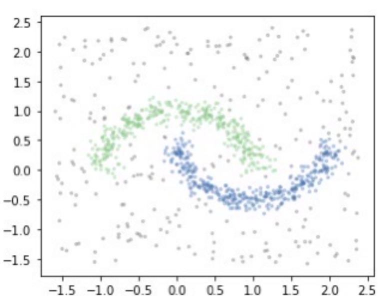
Teorema:

de Componentes conexas por caminos de K = dimensión de $\underbrace{H_0(K;\mathbb{Z}_2)}$ Espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$

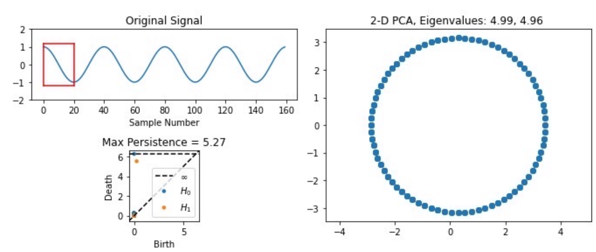
Teorema:

de huecos de K = dimensión de $H_1(K;\mathbb{Q})$ espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$

Aplicación: Clustering (Martes)



Aplicación: Periodicidad en series de tiempo.



(miércoles)